1-ma’ruza

Boshlangich funksiya, aniqmas integral va ularning geometrik talqinlari. Aniqmas integralning xossalari va integrallash usullari. Asosiy elementar funksiyalar integrallari.Integrallash usullari. Bevosita integrallash, o'zgaravchilami almashtirish, bo‘laklab integrallash. Kasr-rasional funksiyalarni integrallash.

Kasr-ratsaional funksiyalarni I, II, III va IV - tur eng sodda kasr-rasioanal funksialarga yoyish va ulami integrallash Ba’zi bir irratsional va trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash.

Reja:

1. **Boshlang’ich funksiya va uning xossasi.**
2. **Aniqmas integral va uning xossalari.**
3. **Asosiy integrallar jadvali.**
4. **Integrallash usullari.**

5 . Ratsional kasr funksiyalarni integrallash:

a). To’g’ri va noto’g’ri kasr ratsional funksiyalar haqida;

b). To’g’ri kasr ratsional funtsiyalarni sodda kasrlar ko’rinishida ifodalash va ularni integrallash;

v). To’g’ri kasr ratsional funksiyalarni sodda kasrlar ko’rinishida ifodalash.

6. Ayrim irratsional funksiyalarni integrallash

7. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Tayanch ibora va tushunchalar.

Boshlang’ich funksiya, aniqmas integral, integrallash usullari, bo’laklab integrallash, o’zgaruvchini almashtirib integrallash.

1. Boshlang’ich funksiya va uning xossasi. Ma’lumki matematikada amallar juft-juft bo’lib uchrab keladi. Jumladan, qo’shish va ayirish, ko’paytirish va bo’lish, darajaga ko’tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funksiya hosilasini topishga yoki differensialash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug’iladi.

Differensial hisobda funksiya berilgan bo’lsa, uning hosilasini topishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to’g’ri keladiki, berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday, $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo’lsin. Ma’lumki, bunday $F(x)$ funksiyaga berilgan $f(x)$ funksiyaning ***boshlang’ich*** **(dastlabki)** ***funksiyasi*** deyiladi.

Masalan, $y = f(x) = x^4$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi, $F(x) = \frac{x^5}{5}$ bo'ladi, chunki $F'(x) = (\frac{x^5}{5})' = x^4 = f(x)$ bo'ladi.

2. Aniqmas ***integral va uning xossalari.***

Ta'rif. $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, $F(x)+C$ (bunda C ixtiyoriy o'zgarmas) funksiyalar to'plami shu oraliqda $f(x)$ ***funksiyaning aniqmas integrali*** deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bilan belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o'zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ simvol, $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang'ich funksiyalari to'plamini belgilaydi.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

Aniqmas *integralning xossalari*:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differensiali esa integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad ва \qquad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) biror funksiyaning hosilasidan hamda differensialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$f'(x)dx = f(x) + C \qquad ва \qquad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalar aniqmas integralning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, 1-xossadan $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bo'ladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o'quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3) o'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni $K = const \neq 0$ bo'lsa,

$$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx;$$

4) chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)\,dx.$$

3. Asosiy integrallar jadvali. Berilgan funksiyaga asosan uning boshlang'ichini topish, berilgan funksiyani Differensiallashga nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differensial hisobda asosiy elementar funksiyalarning, yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning hamda murakkab funksiyalarning hosilasini topishni o'rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funksiyalarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funksiyalarni integrallashda esa Differensiallashdagidek umumiy qoidalar yo'q. masalan, ikkita elementar funksiyalar boshlang'ichlarining mahlum bo'lishiga qaramasdan, ular ko'paytmasining, bo'linmasining boshlang'ichini topishda aniq bir qoida yo'q.

Integrallashda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashda ancha kengroq fikr yuritish kerak bo'ladi. Funksiyani integrallash ya'ni boshlang'ich funksiyani topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko'rsatadiki, ular yordamida ko'p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashda maqsadga erishish uchun quyidagi **asosiy integrallar jadvalini** yoddan bilish zarur.

$$1)\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad 2)\ \int dx = x + C; \quad 3)\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4)\ \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 5)\ \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 6)\ \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7)\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1); \quad 8)\ \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$9)\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad 10)\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C;$$

$\int$

$$11)\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C; \quad 12)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, \ a \neq 0;$$

$$13)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} = \ln x + \sqrt{x^2 - k} + C.$$

Bu formulalarning to'g'riligini, tekshirish tengliklarning o'ng tomonidagi ifodalar differensiali integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko'rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

4. Aniqmas integralda integrallash usullari

1. *O'zgaruvchini almashtirish*. Ko'p hollarda yangi o'zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x)=t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o'zgaruvchi bo'lib, o'zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$$

ko'rinishda bo'ladi.
Oddiy hollarda

$$xdx=\frac{1}{2}d(x^2),\ \ \cos xdx=d(\sin x),\ \ \frac{dx}{x}=d(\ln x),\ \ dx=\frac{1}{a}(ax+b),\ ....$$

tengliklardan foydalanib, o'zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib, bevosita integrallash ham mumkin.

2. Bo'laklab integrallash. Bo'laklab integrallash usuli differensial hisobning ikkita funksiya ko'paytmasi differensiali formulasiga asoslangan.

Ma'lumki, $d(uv)=udv+vdu,$ bundan $udv=d(uv)-vdu.$ Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu=uv-\int vdu$$

natijaga ega bo'lamiz. Shunday qilib,

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (1)$$

formulani hosil qildik. (1) formulaga ***bo'laklab integrallash*** formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int udv$ integraldan ikkinchi $\int vdu$ integralga o'tiladi. Demak, bo'laklab integrallashni qo'llash natijasida hosil bo'lgan ikkinchi integral, berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo'lgandagina bu usulni qo'llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko'paytuvchilarga qulay bo'laklab olish natijasida erishish mukmin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun v va du larni aniqlash kerak bo'ladi. du ni topish uchun u ning Differensiali topilib, v ni topish uchun esa dv ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o'zgarmas C ga bog'liq bo'lib, uning istalgan bir qiymatini xususiy holda $C=0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u Differensiallash bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo'lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo'lishi kerak.

Bo'laklab integrallash formulasi ko'proq:

1) $\int p(x)e^{ax}dx,\ \int p(x)\sin mxdx,\ \int p(x)\cos axdx$ *ва*

2) $\int p(x)\ln xdx, \int p(x)\arcsin xdx, \int p(x)\arccos xdx, \int p(x)arctgxdx,\ \int p(x)arcctgxdx$

(bularda $p(x)$ biror darajali ko'phad) ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda 1) guruh integrallarda u uchun $p(x)$

ko'phad, qolgan qismi dv uchun olinib, 2) guruh integrallarda u uchun mos ravishda

$$\ln x, \arcsin x, \arccos x, \quad arctgx, \quad arcctgx \text{ lar,}$$

qolgan qismi dv uchun olinadi.

Ratsional kasr funksiyalarni integrallash. a). To'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funksiyalar haqida. Shunday funksiyalar sinflari borki, ular uchun muayyan usullardan foydalanib ularni jadval integrallariga yoki integrallash usullaridan foydalanish uchun qulay holga keltirish mumkin, shunday funksiya sinflaridan ayrimlarini qaraymiz.

Ma'lumki, har qanday ratsional funksiyani ushbu ko'rinishida ifodalash mumkin, ya'ni

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... a_n}.$$

Suratdagi ko'phadning darajasi maxrajdagi ko'phad darajasidan kichik, ya'ni $m < n$ bo'lsa, berilgan kasrga ***<u>to'g'ri kasr ratsional</u>*** funksiya deyiladi. Suratdagi ko'phadning darajasi $m \geq n$ bo'lsa, ***<u>noto'g'ri kasr ratsional funksiya</u>*** deyiladi. Kasr noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lsa, suratni maxrajga, ko'phadni ko'phadga bo'lish qoidasiga asosan bo'lib, uning butun qismini ajratib, uni butun va to'g'ri kasr ratsional funksiyaga keltirish mumkin.

Umumiy holda, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lsa, uni

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$$

shaklda ifodalash mumkin, bu yerda $T(x)$ butun ratsional funksiya, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri ratsional kasr funksiyadan iborat. $T(x)$ funksiyani osongina integrallash mumkin.

Shunday qilib, noto'g'ri kasr ratsional funksiyani integrallashni, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

b). To'g'ri kasr ratsional funtsiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash va ularni integrallash

$$1)\ \frac{A}{x-a};\ 2)\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k > 1\ \text{бутун сон});\ 3)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\ (\frac{p^2}{4} - q < 0$$

ya'ni, kvadrat uch had haqiqiy ildizga ega emas);

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n>1$ butun son, $\dfrac{p^2}{4}-q<0$) ratsional to'g'ri kasrlarga ***sodda kasr ratsional funksiyalar*** deyiladi. (A, B, p, q, a - haqiqiy sonlar).

Birinchi ikki xildagi funksiyalarni osongina integrallash mumkin, ya'ni,

1) $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C,$

2) $\int \dfrac{A}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\dfrac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \dfrac{A}{1-k}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$

bo'ladi. Endi ushbu

3) $\int \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

integralni hisoblaymiz.

Oldin xususiy hol $\int \dfrac{1}{x^2+px+q}dx$ integralni qaraylik. x^2+px+q dan to'la kvadrat ajratib, $x+\dfrac{p}{2}=t$ almashtirishdan keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx = \left| \begin{matrix} x+\dfrac{p}{2}=t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)},$$

bu yerda $a=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$. Oxirgi integralda integrallash jadvalidan foydalanib,

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \qquad (2)$$

natijani hosil qilamiz.

Endi $\int \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ integralni hisoblaymiz.

$$Ax+B = (2x+p)\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B$$

shakl o'zgartirishdan foydalanib, integralni quyidagicha yozamiz.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(2x+p)\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx.$$

Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln\left|x^2+px+q\right| + C_1$$

bo'lib, ikkinchi integral (2) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C_2 \ .$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

v) To'g'ri kasr ratsional funksiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash.

$\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr ratsional funksiyaning maxrajini

$$P(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s .....(x^2+2px+q)^t \cdot (x^2+2kx+\ell)^m ..... ,$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, bu funksiyani yagona

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{B_1}{(x-b)} + ... + \frac{B_s}{(x-b)^s} + ... + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} + ... +$$

$$+ \frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \frac{F_1x+E_1}{\left(x^2+2kx+\ell\right)} + ... + \frac{F_mx+E_m}{\left(x^2+2kx+\ell\right)^m} + ... \qquad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda $r, s, . t, m,$ musbat butun sonlar, a, b, p, q, k, ℓ, haqiqiy sonlar.

$A_1, A_2,.... A_r, B_1,..., B_s, M_1, N_1,....., M_t, N_t,....$ lar ayrim haqiqiy sonlar. (1) tenglikka to'g'ri ratsional funksiyaning ***<u>sodda kasrlar orqali yoyilmasi</u>*** deyiladi.

(1) yoyilmadagi $A_1, A_2,.... A_r, M_1, N_1,....., M_t, N_t,....$ koeffitsientlarni topish uchun uni $P(x)$ ga ko'paytiramiz. $R(x)$ ko'phad bilan (1) yoyilmaning o'ng tomonida hosil bo'lgan ko'phad o'zaro teng bo'lishi uchun bir xil darajali x lar koeffitsientlari o'zaro teng bo'lishi kerak. Bir xil darajali x lar koeffitsientlarini tenglashtirib $A_1, A_2,.... A_r, ..., M_1, N_1,....,$ nomahlum koeffitsentlarga nisbatan chiziqli

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini yechib aniqmas koeffitsientlarni topamiz.

Ratsional funkiya yoyilmasidagi nom‘lum koeffitsientlarni bunday usul bilan topishga ***noma‘lum koeffitsientlar usuli*** deyiladi.

Ayrim irratsional funksiyalarni integrallash. ***Irratsional funksiyalarni integrallash*** ko’p hollarda o’zgaruvchini almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunday irratsional funksiyalarning ayrimlarini qaraymiz.

1. $\int x^m (a+bx^n)^p$ **ko’rinishdagi integral**ni ќisoblash talab etilsin,

bunda m, n, p ratsional sonlar, a va b lar no’ldan farqli o’zgarmaslar.

1) p butun son bo’lsa, Nyuton binomi bo’yicha yoyish bilan integrallanadi;

2) $\frac{m+1}{n}$ butun bo’lsa, $a+bx^n = t^s$ almashtirish orqali

ratsionallashtiriladi, bunda s p kasrning maxraji;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ butun bo’lsa, $ax^{-n} + b = t^s$ almashtirish olinib,

ratsional funksiyaga keltiriladi.

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **ko’rinishdagi integralni qaraymiz.**

Bunday ko’rinishdagi ifodalarni integrallash kvadrat uch haddan to’la kvadrat ajratish bilan $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ yoki $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$ jadval integrallaridan biriga keltiriladi.

Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Har xil argumentli sinus va kosinuslar ko’paytmalari shaklidagi funksiyalarni integrallash.

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx \qquad (1)$$

ko’rinishdagi integrallarni hisoblaymiz. Maktab kursidan ma’lum bo’lgan trigonometrik funksiyalar ko’paytmasini, yig’indiga keltirish

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

formulalardan foydalanib, (1) ko’rinishdagi integrallarni

$$\int \sin axdx, \quad \int \cos bxdx$$

integrallardan biriga keltirib itegrallanadi.

$\int \sin^m x \cos^n x dx$ **ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.** Bunda m,n lar butun sonlar. Xususiy hollarda m yoki n sonlardan birontasi 0 ga teng bo'lishi ham mumkin.

1) m yoki n sonlardan bittasi toq bo'lsin. Bu holda integral ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunda integrallash mohiyati quyidagi misollardan tushunarli bo'ladi.

Endi m va n sonlar ikkalasi ham toq yoki juft va musbat bo'lsin. Bunday hollarda

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

formulalardan foydalanib, darajalarni pasaytirib, integrallanadi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang'ich funksiya qanday funksiya?
2. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
3. Asosiy integrallar jadvali nimalardan iborat?
4 . O'zgaruvchini almashtirib integrallashning mohiyati nima?
5. Bo'laklab integrallash qanday holda maqsadga muvofiq bo'ladi?
6. Noto'g'ri kasr ratsional funksiyani integrallash, to'g'ri ratsional funksiyani integrallashga qanday qilib keltiriladi?
7. Irratsional funksiyalar qanday integrallanadi?
8. Trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasini yig'indiga keltiriladigan formulalarni yozing?

Foydalanilgan adabiyotlar

1. G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.T. Mansurov, B.A.Shoimqulov. Matematik analizdan ma'ruzalar 1-qism.-T.: Voris nashiriyot, 2010.
2. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 3-qism. -T.: O'qituvchi, 1996.
3. Д.Писменный. "Конспект лекций по высшей математике", Полный курс. -М.: Айрис Пресс, 2006.